Leçon 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Développements :

Densité des polynômes orthogonaux, Intégrale de Dirichlet.

Bibliographie :

Faraut, ZQ, Candelpergher, Hauchecorne, Bernis, Gourdon, Briane Pagès, OA, Rudin, Ouvrard.

Rapport du jury 2017 :

Souvent les candidats incluent les théorèmes de régularité (version segment — a minima — mais aussi version "convergence dominée") ce qui est pertinent. Cette leçon peut être enrichie par des études et méthodes de comportements asymptotiques. Les propriétés de la fonction γ d'Euler fournissent un développement standard (il sera de bon ton d'y inclure le comportement asymptotique). Les différentes transformations classiques (Fourier, Laplace, . . .) relèvent aussi de cette leçon. On peut en donner des applications pour obtenir la valeur d'intégrales classiques (celle de l'intégrale de Dirichlet par exemple). Pour aller plus loin, on peut par exemple développer les propriétés des transformations mentionnées (notamment Fourier), ainsi que de la convolution.

1 Rapport du jury 2018 :

Souvent les candidats incluent les théorèmes de régularité (version segment — a minima — mais aussi version « convergence dominée ») ce qui est pertinent. Cette leçon peut être enrichie par des études et méthodes de comportements asymptotiques. Les propriétés de la fonction Γ d'Euler fournissent un développement standard (on pourra y inclure le comportement asymptotique, voire son prolongement analytique). Les différentes transformations classiques (Fourier, Laplace,...) relèvent aussi naturellement de cette leçon. On peut en donner des applications pour obtenir la valeur d'intégrales classiques (celle de l'intégrale de Dirichlet par exemple). Le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale est trop peu souvent cité. Pour aller encore plus loin, on peut par exemple développer les propriétés des transformations mentionnées (notamment la transformée de Fourier, par exemple en s'attardant sur le lien entre régularité de la fonction et décroissance de sa transformée de Fourier), ainsi que de la convolution.

2 Théorèmes de régularité

Remarque 1 (ZQ p307)**.** *Cadre : (X, T, μ) un espace mesuré, E un espace métrique. On considère la fonction F ....*

2.1 Outil

Théorème 2 (Faraut p16)**.** *[Nourdin p81][Briane Pagès p134] Convergence dominée.*

Remarque 3. *Reste vrai si les f_n et g sont dans L^p.*

2.2 Continuité sous le signe intégral

Théorème 4 (ZQ p307)**.** *[Briane Pagès p138] Continuité en un point sous l'intégrale.*

Corollaire 5 (ZQ p307)**.** *Continuité sur E en supposant la continuité de f sur E.*

Remarque 6 (Candel p46)**.** *La continuité est une notion locale, on peut donc montrer la continuité sur un voisinage du point.*

Contre exemple 7 (Hauch p224)**.** *$F(t) \int_0^{+\infty} xexp(-xt)dt$ n'est pas continue en 0.*

Exemple 8 (ZQ p313)**.** *La fonction Γ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$.*

Application 9. *Dans le cas où $X = \mathbb{N}$ et où μ est la mesure de comptage, on obtient le théorème de continuité des séries de fonctions continues.*

2.3 Dérivabilité

Théorème 10 (ZQ p308)**.** *[Briane Pagès p141] Dérivabilité sous l'intégrale. Hypothèses trop fortes ?*

Corollaire 11. *Si f est C^1, on obtient également F C^1.*

Remarque 12. *Ce résultat se généralise au cas D^k et C^k en itérant ce théorème.*

Application 13. *Dans le cas où $X = \mathbb{N}$ et où μ est la mesure de comptage, on obtient le théorème de dérivabilité des séries de fonctions continues*

Exemple 14 (Gourdon p159)**.** *Γ est C^∞ et donner les dérivées.*

Exemple 15 (Candel p46). *Calcul de l'intégrale de Gauss.*

Contre exemple 16 (Hauch p226).

Exemple 17 (Gourdon p164). *Calcul de* $\int_0^{+\infty} sin(xt)/texp(-t)dt$.

Application 18 (Gourdon, X ENS An 2). *pour une fonction continue et positive,* $(\int_0^1 (f(t))^\alpha dt)^{1/\alpha} \to exp(\int_0^1 ln(f(t)))$.

Application 19 (Gourdon). *Si* f *est* C^∞ *et s'annule en* 0 *alors* $g(x) = f(x)/x$ *si* x *non nul et* $f'(0)$ *sinon est* C^∞.

2.4 Holomorphie

Théorème 20 (ZQ p309). *Théorème d'holomorphie sous l'intégrale.*

Remarque 21. *Ce théorème illustre la puissance de la formule de Cauchy : on a seulement besoin d'un contrôle sur la fonction et pas sur sa dérivée. A ce titre, quand on est confronté à une intégrale à paramètre réel, on peut passer en variable complexe pour démontrer plus facilement l'holomorphie, et conclure par un argument de prolongement analytique.*

Exemple 22. Γ *se prolonge en une fonction holomorphe sur* $\{z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0\}$.

3 Convolution

Remarque 23. *La convolée de deux fonctions est un cas particulier d'intégrale à paramètre particulièrement exploitée en analyse.*

3.1 Convolution et régularisation

Définition 24 (Briane Pagès p275). *La convolée pour des fonctions mesurables positives.*

Définition 25 (Briane Pagès p277). *Produit de convolution sous réserve d'existence.*

Proposition 26. *Symétrie si ces quantités sont bien définies.*

Conditions suffisantes d'existence

Proposition 27 (Briane Pagès p279). *Si* f *est* L^1_{loc} *et* g *bornée à support compact alors le produit de convolution existe en tout point* x.

Proposition 28 (Briane Pagès p283). *Si* f *est* L^1 *et* gL^p *alors le produit de convolution est défini presque partout et est dans* L^p : $||f * g||_p \leq ||f||_1||g||_p$

Proposition 29 (Briane Pagès p279). *Si* f *est* L^p *et* g L^q *avec* p *et* q *des exposants conjuguées, alors le produit de convolution est défini en tout point, uniformément continue et bornée :* $||f * g||_\infty <= ||f||_p||g||_q$.

Remarque 30. *On voit l'aspect régularisant du produit de convolution.*

Proposition 31 (Briane Pagès p ?). *Soient* p, q, r *tels que* $1/p+1/q = 1+1/r$ *alors, si* f *est dans* L^p , g *dans* L^q *alors le produit de convolution est défini presque partout et est dans* L^r : $||f * g||_r \leq ||f||_p||g||_q$.

Exemple 32 (Faraut p114). $f = 1_{[a,b]}$ *et* $g)1_{[c,d]}$ *alors le graphe de la convolée a la forme d'un trapèze.*

Application 33 (ZQ). *Construction des fonctions plateaux.*

Proposition 34 (OA p117). *Régularisation avec* gC^∞.

Proposition 35 (Briane Pagès p288). *Si* $\phi \in C^n$ *à support compact et* f *est* L^1_{loc} *alors le produit de convolution est* C^n *et* $D(f * g) = f * D(g)$.

Pas d'unité donc va approximer cette unité.

3.2 Approximation de l'unité

Remarque 36. *La convolution régularise et approxime. Ceci permet de montrer des résultats de densité.*

Définition 37 (OA p119). *Approximation de l'unité.*

Exemple 38 (OA p119). *[Briane Pagès p284] Exemple de construction.*

Proposition 39 (OA p119). *Théorème d'approximation.*

Application 40 (OA p121). *Densité des fonctions* C_c^∞ *dans* L^p.

Application 41 (OA). *[ZQ] Théorème de Féjer.*

4 Transformée de Fourier

4.1 Définitions et propriétés

Définition 42 (Candel p352). *[Gasquet Willem] Transformée de Fourier.*

Exemple 43 (Faraut p130). *Exemples de transformées.*

Proposition 44. *Théorème de Riemann Lebesgue.*

Proposition 45 (Candel p352). $TF(f) \in C_0(\mathbb{R})$.

Proposition 46 (Candel p352). $TF : L^1 \to C_0(\mathbb{R})$ *est linéaire et continue et appelée transformation de Fourier.*

Contre exemple 47 (Candel p353). *TF(f) n'est pas nécessairement intégrable.*

Proposition 48 (Candel p353)**.** *Si $f \in L^1$ et $g \in L^1$ alors $\int (TF(f)g = \in fTF(g)$.*

Les autres propriétés avec la dérivée.

Définition 49 (Candel p365)**.** *Espace de Schwartz*

Exemple 50. *Les fonctions C^∞ à support compact, $exp(-x^2)$.*

Proposition 51 (Candel p366)**.** *TF va de S dans S. C'est un isomorphisme. (bijection bicontinue).*

Remarque 52. *Interet de l'espace de Schwartz : f à support compact, TF à support compact si et seulement si $f = 0$.*

4.2 Transformée de Fourier et convolution

Théorème 53 (Candel p366)**.** *$TF(f * g) = TF(f)TF(g)$.*

Exemple 54. *Calcul de $\int_0^\infty sin(x)^2/x^2 dx$.*

Proposition 55 (Rudin p224)**.** *Théorème d'inversion.*

Application 56 (Candel p367)**.** *Moyen pratique pour calculer un produit de convolution.*

Exemple 57 (Candel p361-367)**.** *Fonction de Cauchy : calcul et convolution.*

Proposition 58 (Rudin p225)**.** *Injectivité.*

Application 59. *$(L^1, *)$ n'admet pas d'élément neutre.*

Application 60. *Densité des polynômes orthogonaux.*

Application 61. *Théorème de Plancherel.*

4.3 Fonctions caractéristiques

Définition 62 (Ouvrard p195)**.** *Transformée de Fourier. Fonction caractéristique.*

Proposition 63 (Ouvrard p196)**.** *Fonction caractéristique et espérance.*

Exemple 64. *Loi de Poisson, loi à densité.*

Remarque 65. *Si ϕ est à densité, on retrouve la transformée de Fourier habituelle.*

Théorème 66 (Ouvrard p203)**.** *La fonction caractéristique caractérise entièrement la loi par injectivité de la transformée de Fourier.*

Proposition 67 (Ouvrard p205)**.** *Critère d'indépendance.*

Proposition 68 (Ouvrard p207)**.** *Fonction caractéristique de la somme de va.*

Proposition 69 (Ouvrard p209)**.** *Liens entre fonctions caractérisques et moments.*

Proposition 70. *Si deux va bornées ont même moments à tout ordre, elles sont égales.*

Théorème 71. *Théorème de Lévy.*

Application 72. *Théorème central limite.*